Основы финансовой математики

1. Основы финансовых расчетов

Предметом финансовой математики является количественный анализ, осуществляемый при финансовом проектировании и выборе инвестиционных проектов. К основным задачам финансовой математики, в том числе, относятся планирование инвестиционных проектов, расчет конечных результатов финансовых операций, оценка эффективности сделок с финансовыми инструментами.

Понятие процента и процентной ставки

Под процентом (процентными деньгами) понимается абсолютная величина дохода от различных финансовых операций типа помещения денежных средств на банковский депозит, предоставления кредита, приобретения облигаций и т.п. При заключении финансовой сделки стороны договора согласуют размер процентной ставки, а также период начисления (например, ежемесячно, ежеквартально или один раз в месяц). Кроме того, оговаривается срок сделки.

Исторически сложились два подхода к счету процентных денег: от настоящего к будущему (так называемое наращение) и, наоборот, от будущего к настоящему (так называемое дисконтирование).

Существует большое количество видов процентных ставок и методов начисления процентов. Два наиболее часто применяемых вида начисления процентов – по простой процентной ставке и по сложной процентной ставке. При простой процентной ставке за базу для расчета на всех периодах начисления принимается первоначальная сумма. При сложной процентной ставке за базу для расчета на следующем периоде начисления принимается сумма, полученная на предыдущем периоде начисления.

1.2. Способы и формулы расчета процентных выплат (простой, сложный, эффективный процент)

К наращению по простым процентам обычно прибегают при краткосрочных депозитах или ссудах (до одного года), или в случаях, когда проценты не присоединяются к первоначальной сумме.

Для расчета наращенной суммы по простым процентам при сроке сделки менее одного года на примере банковского депозита используется следующая формула:

$$FV = PV \cdot (1 + r \cdot \frac{t}{база}) \qquad (1.1)$$

где

PV – первоначальная сумма;

r – процентная, выраженная в долях единицы в расчете на временную базу начисления процентов (базовый период) T;

t – срок вклада менее одного года;

FV – сумма, полученная в конце вклада (наращенная сумма).

При расчете процентов обычно применяют разные годовые базовые периоды – 365 дней или 360 дней (принимая, что в году 12 месяцев по 30 дней). При этом, упоминая процентную ставку r, говорят « r » процентов годовых». Необходимо обратить внимание, что в ряде случаев процентная ставка указывается не для годового, а для более короткого периода (полгода, квартал, месяц). В этих случаях рекомендуется перед проведением расчетов привести процентную ставку к годовому базовому периоду.

Пример 1

Банк начислил простой процент на вклад в сумме 1000 руб. по процентной ставке 12% годовых. Срок вклада 90 дней, базовый период 365 дней. Определить, какая сумма будет получена по истечению срока вклада?

Решение

$$FV = 1000 \cdot \left(1 + 0{,}12 \cdot \frac{90}{365}\right) = 1029{,}59\,руб.$$

Если срок вклада более одного года и составляет целое число лет, то при условии фиксированной процентной ставки формула (1.1) принимает следующий вид:

$$FV = PV \cdot (1 + r \cdot n) \tag{1.2}$$

где

n – срок вклада в годах.

Пример2

Банк начислил простой процент на вклад в сумме 1000 руб. по процентной ставке 12% годовых. Срок вклада 2 года. Определить, какая сумма будет получена по истечению срока вклада?

Решение

$$FV = 1000 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 2) = 1240\,руб.$$

В случае если процентная ставка меняется, формула (1.2) модифицируется:

$$FV = PV \cdot (1 + r_1 + r_2 + ... + r_n) \tag{1.3}$$

где

r_1, r_2,… r_n – процентная ставка в n-ом году.

Пример3

Вкладчик размещает на счете 2000 руб. на три года. Банк начисляет простой процент. Процентная ставка за первый год равна 8%, второй – 9%, третий – 10%. Определить, какая сумма будет получена по счету через 3 года?

Решение

$$FV = 2000 \cdot (1 + 0{,}08 + 0{,}09 + 0{,}1) = 2540\,руб.$$

Расчет наращенной суммы по заданным процентной ставке, первоначальной сумме и сроке вклада относится к классу прямых задач расчета процентных выплат. Расчет дисконтированной суммы по заданным сумме в конце вклада, процентной ставке и сроке вклада относится к классу обратных задач. Также к обратным задачам можно отнести такие задачи, как определение процентной ставки или срока вклада по первоначальной и наращенной суммам.

Используя формулы (1.2) и (1.3), получим зависимость для расчета дисконтированной суммы (первоначальной суммы вклада) в условиях обратной задачи:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r \cdot n)} \tag{1.4.1}$$

$$PV = \frac{FV}{(1 + r_1 + r_2 + ...r_n)} \tag{1.4.2}$$

Пример 4

Вкладчик положил в банк некоторую сумму в начале 2005 г. Банк выплачивал простые проценты по следующим процентным ставкам: 2005 г. – 10% годовых; 2006 г. – 11% годовых; 2007 г. – 12% годовых. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите, какую сумму он положил в банк, если на его счете в начале 2008 г. Была 13 300 руб.?

Решение

$$PV = \frac{13300}{(1 + 0{,}1 + 0{,}11 + 0{,}12)} = 10000\,руб.$$

Для обратных задач, в условиях которых требуется определить величину процентной ставки, используется, в том числе, следующая зависимость, вытекающая из выражения (1.2):

$$r = \left(\frac{FV}{PV} - 1\right) \cdot \frac{1}{n} \tag{1.5}$$

Пример 5

Вкладчик положил в банк 20 тыс. руб. в начале 2006 г. Банк начислял простые проценты. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите процентную ставку банка, если в начале 2008 г. на счете вкладчика было 50 тыс. руб.

Решение

$$r = \left(\frac{50}{20} - 1\right) \cdot \frac{1}{2} = 0{,}75 \text{ или } 75\%.$$

В средне- и долгосрочных финансовых операциях, если проценты не выплачиваются сразу, а присоединяются к первоначальной сумме (так называемая капитализация процентов), применяют сложные проценты. Для расчета наращенной по сложным процентам суммы, если срок сделки составляет целое число лет и применяется фиксированная процентная ставка, на примере банковского депозита используется следующая формула:

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n \qquad (1.6)$$

Таким образом, как показывает сравнение выражений (1.6) и (1.2), при прочих равных условиях банковский депозит, начисляемый по сложным процентам, является более доходным, чем депозит по схеме простых процентов.

Пример 6

Банк начислил сложный процент на вклад в сумме 1000 руб. по процентной ставке 12% годовых. Срок вклада 2 года. Определить, какая сумма будет получена по истечению срока вклада?

Решение

$$FV = 1000 \cdot (1 + 0{,}12)^2 = 1254{,}40\,руб.$$

Сравнение этого примера с примером при формуле (1.2) демонстрирует преимущество сложных процентов.

В случае меняющейся процентной ставки формула (1.6) модифицируется:

$$FV = PV \cdot (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \ldots \cdot (1 + r_n) \qquad (1.7)$$

Пример 7

Вкладчик положил в банк 10 000 руб. Банк выплачивает сложные проценты. Какая сумма будет на счете у вкладчика через два года, если процентная ставка за первый год составляет 20%, а за второй – 30%?

Решение

$$FV = 10000 \cdot (1 + 0{,}2) \cdot (1 + 0{,}3) = 15600\,руб.$$

Из выражения (1.6) вытекает решение обратной задачи нахождения дисконтированной суммы по полученной (наращенной) сумме, процентной ставке и сроке вклада:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r)^n} \qquad (1.8)$$

Пример 8

По окончании второго года на счете инвестора находится сумма 28 732 руб. Начисление происходило по схеме сложного процента по ставке 13% в конце каждого года. Рассчитайте первоначальную сумму вклада.

Решение

$$PV = \frac{28732}{(1 + 0{,}13)^2} = 22501\,руб.$$

Выражения $(1 + r)^n$ и $\frac{1}{(1 + r)^n}$ называют соответственно коэффициентом наращения и коэффициентом дисконтирования при начислении сложных процентов.

Для обратных задач, когда требуется определить величину процентной ставки при начислении сложных процентов, используют, в том числе, следующую зависимость, вытекающую из выражения (1.8):

$$r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 \tag{1.9}$$

Для задач, в которых требуется определить срок вклада, рекомендуется в общем случае использовать метод подбора.

Пример 9

Банк выплачивает сложные проценты. Вкладчик разместил в банке 10 000 рублей. Какую процентную ставку должен обеспечить банк для того, чтобы через два года сумма вклада составила 24 000 руб.?

Решение

$$r = \sqrt[2]{\frac{24000}{10000}} - 1 = 0{,}5492 \; \textit{или} \; 54{,}92\%$$

Для средне- и долгосрочных финансовых операций характерно использование периода начисления процента меньше одного года (например, ежеквартально). В этом случае выражение (1.6) принимает следующий вид:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m} \tag{1.10}$$

где

m – число периодов начисления в году.

Пример 10

Вкладчик размещает в банке 2000 руб. под 8% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов на счете ежеквартально. Какая сумма получится на счете через 3 года?

Решение

$$FV = 2000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{3 \cdot 4} = 2536{,}48 \, руб.$$

Пример 11

Банк начислил сложный процент на вклад в сумме 1000 руб. по процентной ставке 12% годовых. Срок вклада 2 года. Капитализация процентов осуществляется один раз в полгода. Определить, какая сумма будет получена по истечению срока вклада?

Решение

$$FV = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^{2 \cdot 2} = 1262{,}48 \, руб.$$

Сравнение последнего примера с примером при формуле (1.6) показывает, что чем чаще начисляются проценты, тем при прочих равных условиях выгоднее депозит.

В целом ряде случаев возникает необходимость сравнения доходности финансовых инструментов, использующих различные схемы и периоды начисления. Для такого сравнения используют, в том числе, эффективную ставку процента. Под эффективным процентом понимается процент, который получается по итогам года при начислении процента в рамках года. Иными словами, это ставка процента, которая дает такой же результат, как и ставка сложного процента r с начислением m раз в течение года.

$$(1 + r_{eff}) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \tag{1.11}$$

Приравнивая, получим связь между эффективной и номинальной процентными ставками:

$$r_{eff} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 \tag{1.12}$$

Пример 12

Банк начисляет процент на вклад в сумме 1000 руб. по процентной ставке 10% годовых. Проценты капитализируются ежеквартально. Определить величину эффективного процента.

Решение

$$r_{eff} = \left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}1038$$

Если известен эффективный процент, то по формуле 1.13, которая вытекает из формулы 1.11, можно определить эквивалентный ему простой процент в расчете на год:

$\mathrm{r} = (\sqrt[m]{1 + \mathrm{r}_{\mathrm{eff}}} - 1) * m$	(1.13)

Пример 13

Эффективный процент равен 8,16% годовых. Определить эквивалентный ему простой процент в расчете на год, если начисление процентов осуществляется каждые полгода.

Решение

$$0{,}0816 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 - 1, \quad r = 0{,}08 \text{ *или* } 8\%$$

1.3. Определение стоимости и доходности облигаций. Стоимость бескупонных и купонных облигаций. Текущая доходность облигации, доходности облигации к погашению

Облигация – срочная долговая ценная бумага, удостоверяющая отношения займа между ее владельцем и эмитентом. Известно достаточно много типов облигаций, в том числе купонные и бескупонные. Доход инвестора по бескупонной облигации – разность между ее номинальной стоимостью и ценой приобретения. Для купонных облигаций возникает также дополнительный доход от выплат по купонам. Традиционно облигации котируют в процентах от номинальной стоимости.

Определение цены облигации основано на дисконтировании денежных потоков, связанных с выплатой купонных доходов и номинальной стоимости облигации.

Для бескупонной облигации, поскольку доход по облигации выплачивается один раз при погашении, цена может быть определена по следующей формуле:

$$PV = \frac{N}{(1+r)^n} \qquad (1.14)$$

где

N – номинальная стоимость облигации;

r – доходность облигации к погашению (доходность облигации до погашения) – доходность инвестора в расчете на год, если инвестор, купив облигацию, продержит ее до погашения;

n – число лет до погашения.

Пример 14

Номинал бескупонной облигации равен 1 000 руб., бумага погашается через 7 лет. Определить цену облигации, если ее доходность до погашения должна составить 8% годовых.

Решение

$$PV = \frac{1000}{(1+0{,}08)^7} = 583{,}49 \text{ руб.}$$

Вместе с тем, необходимо иметь в виду, что рыночная цена облигации не обязательно будет совпадать с результатами расчета. Это связано с тем, что разные инвесторы могут использовать различные ставки дисконтирования; на цену также значимо влияют соотношение спроса и предложения на облигацию, информация об эмитенте, его кредитный рейтинг, другие рыночные факторы.

Из выражения (1.14) следует фундаментальное свойство ценообразования облигаций – курсовая стоимость облигации и доходность связаны обратно пропорциональной зависимостью – при повышении доходности облигации к погашению ее цена падает, и наоборот.

Для купонных облигаций поток платежей включает купонные выплаты, а также выплату номинальной стоимости облигации при ее погашении. Поэтому при условии выплаты купона один раз в год цена облигации определяется суммой дисконтированных потоков:

$$PV = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C+N}{(1+r)^n} \tag{1.15}$$

где C – купонный доход по облигации.

Следует обратить внимание, что обычно размер купонного дохода задается в виде процента от номинальной стоимости облигации.

Пример 15

Номинал облигации 1 000 руб., купон 10%, выплачивается один раз в год. До погашения облигации 3 года. Определить цену облигации, если ее доходность до погашения должна составить 12%.

Решение

$$PV = \frac{0{,}1 \cdot 1000}{(1+0{,}12)} + \frac{0{,}1 \cdot 1000}{(1+0{,}12)^2} + \frac{0{,}1 \cdot 1000 + 1000}{(1+0{,}12)^3} = 951{,}96\,руб.$$

Важным элементом анализа облигаций является определение доходности.

Текущая доходность купонной облигации определяется в расчете на один календарный год, для сравнения с альтернативными инвестициями на этот период. Текущая доходность представляет собой отношение величины ожидаемого (или последнего) годового дохода к текущей рыночной цене.

$$r_t = \frac{C}{PV} \tag{1.16}$$

Пример 16

Номинал облигации равен 100 руб., купонная ставка 10 %, текущая цена 80 руб. Чему равна текущая доходность?

Решение

$$r_t = \frac{0{,}1 \cdot 100}{80} = 0{,}125$$

Для инвестора, который приобрел облигацию по цене PV и продержал ее до погашения, важно знать какую доходность обеспечила его инвестиция. В общем случае, для решения этой задачи необходимо определить значение r из уравнения типа (1.15), что без использования финансового калькулятора и специальных программ представляется затруднительным. Тем не менее, для частных случаев можно использовать упрощенные зависимости. В предположении, что весь купонный доход выплачивается при погашении, при этом купонный доход не реинвестируется, рассчитывают **простую (или валовую) доходность к погашению**:

$$r = \frac{N - PV + C \cdot n}{n \cdot PV} \tag{1.17}$$

Пример 17

Облигация сроком обращения 2 года погашается по номиналу. По облигации выплачивается ежегодный купонный доход в размере 5% от номинала. Рыночная цена облигации составляет 91,3% от номинала. Рассчитайте простую доходность облигации к погашению.

Решение

$$r = \frac{100 - 91{,}3 + 5 \cdot 2}{2 \cdot 91{,}3} = 0{,}1024$$

Если облигация является бескупонной, то из выражения (1.14) следует, что доходность до погашения определяется выражением (1.9), где $FV = N$, а PV – цена покупки облигации.

1.4. Периодическое помещение на счет одинаковой суммы. Будущая стоимость аннуитета, приведенная стоимость аннуитета. Расчет стоимости разового платежа, погашение кредита равными выплатами

Регулярный поток постоянных платежей называется финансовой рентой или аннуитетом. Аннуитеты – достаточно распространенный финансовый инструмент, часто используемый, например, в пенсионных схемах.

Будущая стоимость аннуитета при ежегодном платеже может быть определена по формуле $FV = \sum_{i=1}^{n} C_i * (1+r)^{n-i}$. Вместе с тем, для длительных сроков аннуитета расчеты по этой формуле могут оказаться весьма трудоемкими. Более удобным для расчетов представляется эквивалентное выражение следующего вида:

$$FV = \frac{C}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] \qquad (1.18)$$

Пример.

Инвестор в течение трех лет в конце каждого года размещает 1000 руб. под 10% годовых. Определить будущую стоимость аннуитета.

Вариант 1: F = 1000 * $(1+0{,}1)^2$ + 1000 * $(1+0{,}1)^1$ + 1000 = 3310 руб.,

Вариант 2: F = 1000 / 0,1*{$(1+0{,}1)^3$ – 1} = 3310 руб.

В этом примере расчет будущей стоимости аннуитета осуществлен двумя способами. Результаты расчета одинаковы.

Если условиями аннуитета предусмотрено осуществление нескольких (**m**) платежей в год, то выражение (1.18) принимает следующий вид:

$$\mathrm{FV} = \frac{C}{r}\left[(1+\frac{r}{m})^{n*m} - 1\right] \qquad (1.19)$$

Необходимо отметить, что в выражении (1.19) **C –** годовая сумма платежей, а разовые платежи осуществляются равными долями с равной периодичностью.

Пример.

Инвестору выплачивается пятилетний аннуитет. В расчете на год платеж составляет 1000 руб., однако платежи осуществляются через каждые полгода. Инвестор размещает получаемые суммы под 8% годовых до истечения аннуитета. Определить будущую стоимость аннуитета.

$$\mathrm{FV} = \frac{1000}{0{,}08}\left[\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{5*2} - 1\right] = 6003{,}05 \text{ руб.}$$

Приведенная стоимость аннуитета представляет собой будущую стоимость аннуитета, дисконтированную к начальному моменту времени. Расчет приведенной стоимости аннуитета проводится в задачах, когда нужно, например, определить какую сумму следует положить на депозит, чтобы в дальнейшем регулярно снимать одинаковые суммы. Для случая одного ежегодного платежа приведенная стоимость аннуитета определяется по формуле:

$$PV = \frac{C}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] \qquad (1.20)$$

Если в течение года предусмотрено несколько (**m**) платежей в год, то выражение (1.20) усложняется:

$$\mathrm{PV} = \frac{C}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{n*m}}\right] \quad (1.21)$$

Примеры.

1. *В течение восьми лет в конце каждого года необходимо выплачивать 20 тыс. руб. Для решения этой задачи в банке открывается восьмилетний депозит, по которому ежегодно начисляется 9%, средства со счета можно снимать в конце года. Какую сумму следует разместить на депозите, чтобы осуществлять необходимые платежи и, чтобы после последнего платежа на депозите больше не осталось денег?*

$$\mathrm{PV} = \frac{20000}{0{,}09}\left[1 - \frac{1}{(1+0{,}09)^{8}}\right] = 110696{,}4 \text{ руб.}$$

2.Ежегодный платеж по пятилетнему аннуитету составляет 1000 руб. и инвестируется под 10% годовых, капитализация процентов осуществляется через каждые полгода. Определить приведенную стоимость аннуитета.

$$PV = \frac{1000}{0{,}1}\left[1 - \frac{1}{(1+\frac{0{,}1}{2})^{5*2}}\right] = 3860{,}87 \text{ руб.}$$

Одним из вариантов аннуитета является так называемая вечная рента, когда платежи осуществляются без ограничения срока, т.е. **n→∞.** В этом случае будущую стоимость аннуитета определить нельзя, а приведенная стоимость вытекает из выражения (1.20):

$$PV = \frac{C}{r} \quad (1.22)$$

Пример.

Определить приведенную стоимость бессрочного аннуитета, по которому в конце каждого года выплачивается 1 000 руб., если процентная ставка равна 8%.

$$PV = \frac{1000}{0{,}08} = 12500 \text{ руб.}$$

Расчет размера аннуитетного платежа может быть осуществлен как на основе будущей стоимости аннуитета (**F**), так и на основе приведенной стоимости аннуитета (**P**) в зависимости от условий задачи:

$$C = \frac{FV * r}{(1+\frac{r}{m})^{n*m} - 1} \quad (1.23)$$

$$C = \frac{PV * r}{1 - \frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{n*m}}} \quad (1.24)$$

Выражения (1.23) и (1.24) имеют многочисленные применения в задачах определения размера платежа для достижения в заданный срок необходимой суммы, величины периодического платежа по кредиту и т.п. Они записаны в общем виде (**m > 1**), в случае, если платеж осуществляется один раз в год, то эти выражения легко упрощаются.

Примеры.

1. Заемщик берет кредит на десять лет в размере 5 млн. руб. под 15% годовых с условием погашения его равными суммами в конце каждого года. Проценты начисляются в конце каждого года на оставшуюся часть долга. Определить величину ежегодной выплаты по кредиту.

$$C = \frac{5\,000\,000 * 0{,}15}{1 - \dfrac{1}{(1 + 0{,}15)^{10}}} = 996\ 260{,}31 \text{ руб.}$$

2. Заемщик берет кредит на два года в размере 1 млн. руб. под 12% годовых с условием погашения его равными суммами ежеквартально. Проценты начисляются в конце каждого года на оставшуюся часть долга. Определить величину ежеквартального платежа по кредиту.

1) Годовой платеж

$$C = \frac{1\,000\,000 * 0{,}12}{1 - \dfrac{1}{(1 + \dfrac{0{,}12}{4})^{2*4}}} = 569\ 825{,}56 \text{ руб.}$$

2) Ежеквартальный платеж

569 825,56 / 4 = 142 456,39 руб.