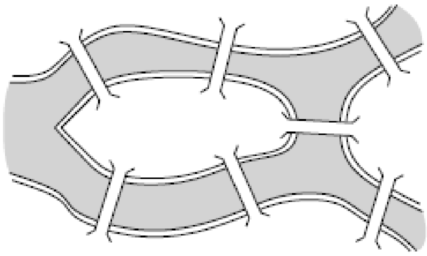
Задача 7.1. (*2 балла*) В стране 9 городов с названиями 1, 2, ..., 9. Если число, составленное из названий двух городов, делится на 3, то эти города соединены авиалинией, иначе не соединены. Можно ли долететь из 1 в 9?

Задача 7.2. Город Кёнигсберг располагался на берегах реки Прегель и двух островах, соединённых семью мостами (см. рис.).



а) (*2 балла*) Можно ли было прогуляться по городу, начав и закончив на центральном острове и пройдя по каждому мосту ровно один раз?
б) (*3 балла*) А если начинать и заканчивать можно где угодно (не обязательно в одном и том же месте)?

Задача 7.3. **а)** (*1 балл*) У каждого из 179 марсиан 3 руки. Смогут ли они взяться за руки так, чтобы свободных рук не осталось?
б) (*1 балл*) А если марсиан 180?

Задача 7.4. (*3 балла*) В стране 15 городов, каждый соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что если A и B не соединены дорогой напрямую, то из A в B можно проехать через промежуточный город.

Задача 7.5. (*5 баллов*) В стране любые 2 города соединены или железной дорогой, или авиалинией. Докажите, что одним из этих видов транспорта можно добраться из любого города в любой (возможно, с пересадками).

Задача 7.6. (*2 балла*) Аквариум 3×3 разделён стенками на аквариумы 1×1, в каждом живёт пиранья. В каждой стенке есть дверь, сначала они заперты. Когда дверь, разделяющая двух пираний, открывается, одна съедает другую. В конце осталась одна пиранья. Какое наименьшее количество дверей могло быть открыто?

Задача 7.7. Двое играют в «змейку» на доске 10×10. В углу стоит фишка. За ход можно передвинуть её на соседнюю по стороне клетку, если фишка до этого там не была. Есть одно исключение: в свой первый ход первый игрок может (если хочет) передвинуть фишку не один раз, а дважды. Проигрывает тот, кому некуда ходить.
а) (*5 баллов*) Докажите, что у второго нет выигрышной стратегии, а у первого есть.
б) (*5 баллов*) Кто может обеспечить себе победу, если первый игрок и в первый ход передвигает фишку один раз?

Задача 7.8. **а)** (*3 балла*) В стране 10 городов. Каждый год между какими-то двумя городами вводят двустороннюю авиалинию. За какое наименьшее число лет можно добиться того, чтобы из любого города можно было долететь в каждый (возможно, с пересадками).
б) (*3 балла*) А если авиалинии односторонние?

Дополнительные задачи

Задача 7.9. Имеются 7 монет, шесть из которых одинаковые, а одна фальшивая и отличается от них по весу (неизвестно, в какую сторону). Также имеются чашечные весы, которые показывают правильный результат, если на чашах разный вес, и неправильный, если вес одинаковый.
а) (*5 баллов*) Как найти фальшивую монету и узнать, тяжелее ли она настоящих?
б) (*5 баллов*) Как сделать это за 6 взвешиваний?

Задача 7.10. (*4 балла*) Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×60 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Задача 7.11. (*5 баллов*) Фома и Ерёма делят 25 монет в 1, 2, ..., 25 алтынов. За ход один выбирает монету, а другой говорит, кому её отдать. Сначала выбирает Фома, далее — тот, у кого больше алтынов, при равенстве — тот, кто и в прошлый раз. Может ли Фома играть так, чтобы в итоге обязательно получить больше алтынов, чем Ерёма?